DiferencialLab
LABORATORIO V2.0

FORMULARIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Guía de estudio • Ecuaciones de primer orden • Sustituciones y clasificación

CASO ESPECIAL SEPARABLE

Se reconoce por: términos con el producto xy. El cambio $t = xy$ es útil si produce una ecuación separable.

1. Despejar $y' = \dfrac{dy}{dx}$ (o $x' = \dfrac{dx}{dy}$).
2. Aplicar la sustitución:

$$\boxed{t = xy}, \qquad \frac{dt}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{dt}{dx} - y\right), \qquad y = \frac{t}{x}.$$

Si conviene usar x como función de y:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}\left(\frac{dt}{dy} - x\right), \quad x = \frac{t}{y}.$$

3. Reemplazar, separar variables e integrar.
4. Sustituir $t = xy$ y dejar la solución como $F(x, y) = C$.

Patrón que sí es separable:

$$y' = \frac{H(xy) - xy}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \frac{H(t)}{x}.$$

ECUACIÓN HOMOGÉNEA

Se reconoce por:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)}$$

También si $y' = M(x, y)/N(x, y)$, con M y N homogéneas del mismo grado.

1. Simplificar y despejar la derivada.
2. Hacer el cambio de variable:

$$\boxed{y = vx}, \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}.$$

Alternativa cuando conviene invertir:

$$\boxed{x = vy}, \qquad \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}.$$

3. Sustituir, separar e integrar:

$$\frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x}.$$

4. Volver a $v = y/x$ (revisar soluciones constantes de v).

Ejemplo: $y' = \dfrac{x + y}{x}$

$$\boxed{y = x(\ln|x| + C)}$$

ECUACIÓN REDUCIBLE A HOMOGÉNEA

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \quad \text{y} \quad D = a_1b_2 - a_2b_1$$

LÍNEAS PARALELAS ($D = 0$)

Si $D = 0$, los términos lineales del numerador y del denominador son proporcionales.

1. Reescribir como $y' = G(ax + by)$, cuando corresponda.
2. **Cambio de variable**:

$$\boxed{t = ax + by}, \qquad \frac{dt}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}.$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dt}{dx} - a\right)} \quad (b \neq 0).$$

3. Sustituir y separar t y x.
4. Integrar y volver a $t = ax + by$.

Ejemplo de cambio: $y' = \dfrac{2x + 2y + 3}{x + y + 1}$.
Tomar $t = x + y$; entonces $t' = 1 + y'$.

LÍNEAS NO PARALELAS ($D \neq 0$)

1. Hallar el punto de intersección (x_0, y_0):

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0. \end{cases}$$

2. Trasladar el origen:

$$\boxed{X = x - x_0, \qquad Y = y - y_0}.$$

3. La ecuación queda homogénea:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}.$$

4. Usar $Y = vX$ y $dY/dX = v + X\,dv/dX$.
5. Separar, integrar y regresar a x, y.

Ejemplo: $y' = \dfrac{x + y + 2}{x - y}$.
$(x_0, y_0) = (-1, -1)$; usar $X = x + 1$, $Y = y + 1$.

DiferencialLab

FORMULARIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

ECUACIÓN EXACTA

Forma general:

$$\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0}.$$

Prueba de exactitud:

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

1. Encontrar una función potencial Φ tal que $d\Phi = M\,dx + N\,dy$.
2. Integrar M respecto a x:

$$\Phi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y).$$

3. Derivar respecto a y e igualar a N:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N(x,y).$$

4. Hallar $g'(y)$, integrar para obtener $g(y)$ y sustituir.
5. Solución implícita:

$$\boxed{\Phi(x,y) = C}.$$

Ejemplo:

$$(2xy+3)\,dx + (x^2+4y)\,dy = 0$$

$$\boxed{x^2y + 3x + 2y^2 = C}.$$

ECUACIÓN REDUCIBLE A EXACTA

Si $M_y \neq N_x$, probar un **factor integrante** μ.

Caso A. Factor $\mu(x)$:

$$\boxed{\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)}$$

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}}.$$

Debe depender **solo de** x.

Caso B. Factor $\mu(y)$:

$$\boxed{\frac{N_x - M_y}{M} = g(y)}$$

$$\boxed{\mu(y) = e^{\int g(y)\,dy}}.$$

Debe depender **solo de** y.

1. Calcular M_y, N_x; probar los cocientes.
2. Hallar μ e incluirlo en ambos términos:

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0.$$

3. Resolver como ecuación exacta.

Ejemplo: $y\,dx + (x+2xy)\,dy = 0$.
Como $\dfrac{N_x - M_y}{M} = 2$, se tiene $\mu(y) = e^{2y}$ y

$$\boxed{xye^{2y} = C}.$$

PROPIEDADES ÚTILES

$$\ln|a| + \ln|b| = \ln|ab|,$$
$$\ln|a| - \ln|b| = \ln\left|\frac{a}{b}\right|,$$
$$\ln(a^r) = r\ln a \quad (a>0),$$
$$e^{\ln a} = a \quad (a>0).$$

DERIVADAS FRECUENTES

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u u',$$
$$\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{u'}{u},$$
$$\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv',$$
$$\frac{d}{dx}(uvw) = u'vw + uv'w + uvw',$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$
$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}u'.$$

DiferencialLab